

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ЛЕНТОЧНО-АДАПТИВНЫХ СЕТОК ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКОВ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В КАНАЛАХ

Димитриенко Ю.И.¹⁾, Захаров А.А.¹⁾, Абакумов А.С.²⁾,

¹⁾МГТУ им.Н.Э.Баумана

²⁾Институт Космических Исследований Российской Академии Наук

В работах [1-3] был разработан метод ленточных адаптивных сеток, предназначенный для численного моделирования движения газовых потоков в областях со сложной геометрией. В настоящей работе осуществлено развитие этого метода на случай течений вязкого теплопроводного газа в областях сложной формы с криволинейными границами типа областей каналов сверхзвуковых воздухозаборников [1–2], которые учитывают комбинированное (внутреннее и внешнее) течение и позволяют вести расчет с заранее неизвестной формой ударных волн и условий на скачках.

Во всей области решается общая система уравнений вязкого теплопроводного газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{E} - \mathbf{T}_v = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot \rho E + p \mathbf{v} - \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

К этим уравнениям присоединяются определяющие соотношения вязкого теплопроводного газа: $p = R\rho\theta$, $e = c_v\theta$, $E = e + |\mathbf{v}|^2/2$, $\mathbf{q} = -\lambda\nabla\theta$, $\mathbf{T}_v = \mu_1(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + \mu_2(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T) = {}^4\mathbf{M} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$, где \mathbf{T}_v – тензор вязких напряжений в газе, ${}^4\mathbf{M}$ -тензор вязкости, μ_1, μ_2 – коэффициенты вязкости газа, λ – коэффициент теплопроводности газа, \mathbf{q} –вектор потока тепла, ρ – плотность газа, t – время, E – полная энергия газа: $E = c_v\theta + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}$, c_v – теплоёмкость при постоянном объеме, θ – температура газа, \mathbf{v} – вектор скорости, $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, p – давление, R – газовая постоянная, \mathbf{E} – метрический тензор.

Система уравнений (1) имеет второй порядок производных, и для ее решения применялся модифицированный метод ленточных адаптивных сеток (ЛАС) [1–3]. Модификация метода ЛАС осуществлялась на основе метода расщепления по физическим процессам. На каждом временном шаге вычисления разбивались на 2 этапа:

1) На первом с помощью метода ЛАС решается система в виде (1) без вязкости и теплопроводности, которая записывается в адаптивных криволинейных координатах X^j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g'} \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \hat{P}^j_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X^j} \left(\frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \rho \hat{v}^{\alpha} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g'} \rho \hat{v}^{\gamma}) + \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\hat{P}^j_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X^j} \left(\frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \hat{R}^{\alpha\beta} \right) \delta_{b\gamma} + \frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \hat{R}^{\alpha\beta} \hat{\Gamma}^{\gamma}_{\beta\alpha} \right) &= 0, \quad (2) \\ \frac{\partial \sqrt{g'} \rho E}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \hat{P}^j_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X^j} \left(\frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \rho \hat{v}^j \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь \hat{P}^j_{α} - Якобиева матрица, g' - якобиан, H_{α} - параметры Ламе, $\hat{\Gamma}^{\gamma}_{\beta\alpha}$ - символы Кристоффеля, $\hat{R}^{\alpha\beta} = \rho \hat{v}^{\alpha} \hat{v}^{\beta} + p \delta^{\alpha\beta}$, \hat{v}^i - физические компоненты вектора скорости в ортонормированном базисе $\hat{\mathbf{r}}^i$.

2) На втором этапе решается параболическая часть системы в виде (1) без конвективных членов и без уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned} \rho \sqrt{g'} \frac{\partial \hat{v}^{\gamma}}{\partial t} &= \sum_{\alpha, s=1}^3 \left(\hat{P}^s_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X^s} \left(\frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \hat{T}^{\alpha\gamma} \right) + \frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \hat{T}^{\alpha s} \hat{\Gamma}^{\gamma}_{s\alpha} \right) \\ \rho \sqrt{g'} \frac{\partial e}{\partial t} &= \sum_{\alpha, s, \sigma=1}^3 \hat{P}^s_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X^s} \left(\frac{\sqrt{g'}}{H_{\alpha}} \frac{\lambda \hat{P}^{\sigma}_{\alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial \theta}{\partial X^{\sigma}} \right) + \sqrt{g'} \omega^* \quad (3) \\ \omega^* &= \sum_{\alpha, \beta, \varepsilon, \omega, s, \sigma=1}^3 \frac{\bar{M}^{\alpha\beta\varepsilon\omega}}{H_{\alpha} H_{\varepsilon}} \left(\hat{P}^s_{\alpha} \frac{\partial \hat{v}_{\beta}}{\partial X^s} + \hat{v}_s \hat{\Gamma}^{\beta}_{s\alpha} \right) \left(\hat{P}^{\sigma}_{\varepsilon} \frac{\partial \hat{v}_{\omega}}{\partial X^{\sigma}} + \hat{v}_{\sigma} \hat{\Gamma}^{\omega}_{\sigma\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

где $\bar{M}^{\alpha\beta\varepsilon\omega}$ - компоненты тензора вязкости в декартовом базисе. Эта система может быть записана в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial U_s}{\partial t} = \Lambda U_s + F_s, \quad (4)$$

здесь дифференциальный оператор имеет вид:

$$\Lambda U_s = \widehat{P}^k \frac{\partial}{\partial X^k} \left(\sum_{z=1}^5 A_{sz}^{ij} \widehat{P}^n \frac{\partial U_z}{\partial X^n} \right) + \sum_{z=1}^5 B_{sz}^j \widehat{P}^n \frac{\partial U_z}{\partial X^n} + \sum_{z=1}^5 C_{sz} U_z$$

и обозначены координатные столбцы: $\check{U}_s = (v_1, v_2, v_3, c_v \theta)^T$, $\check{F}_s = (0, 0, 0, \omega^*)^T$

Для численного решения полученной системы квазилинейных параболических уравнений (4) применялся метод, основанный на расщеплении дифференциальных операторов по координатным направлениям ($\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$) и использовании метода скалярной прогонки вдоль этих направлений. Использовались экономичные методы аппроксимации дифференциальных операторов, пригодные для уравнений с переменными коэффициентами. В результате была получена 4-х шаговая разностная схема, соответствующая цепочке «одномерных» уравнений:

$$\begin{cases} \rho^{m+1/3} (U^{m+1/2} - U^{m+1/3}) = \frac{\Delta t}{2} \Lambda_1 U^{m+1/2}, \\ \rho^{m+1/3} (U_s^{m+2/3} - U_s^{m+1/2}) = \frac{\Delta t}{2} \Lambda_2 U_s^{m+2/3}, \\ \rho^{m+1/3} (U_s^{m+5/6} - U_s^{m+2/3}) = \frac{\Delta t}{2} \Lambda_3 U_s^{m+5/6}, \\ \rho^{m+1/3} (U_s^{m+1} - U_s^{m+1/3}) = \Delta t (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) U_s^{m+5/6} + F_s^{m+1/3} \Delta t. \end{cases} \quad (5)$$

где $U^{m+1/3}$ – значения функций консервативных переменных после первого этапа метода расщепления по физическим процессам, $U^{m+1/2}$, $U^{m+2/3}$, $U^{m+5/6}$, U^{m+1} – значения функций на промежуточных шагах разностной схемы, F – вектор правой части. Первые 3 разностных уравнения решаются методами прогонки относительно $U^{m+1/2}$, $U^{m+2/3}$, $U^{m+5/6}$ соответственно, а последнее уравнение – по явной схеме относительно U^{m+1} .

Постановка граничных условий на границах жесткой стенки, сверхзвукового входа и выхода потока, границе симметрии, а также начальных условий для системы уравнений вязкого газа (1) имела классический вид [3–5].

Численные расчеты были проведены для задачи сверхзвукового течения газа в канале прямоугольного сечения со ступенькой. Число М было выдрано равным $M=3$. На рис. 1- 3 показаны сравнительные результаты численного моделирования для случая идеального газа (расчитывался без учета 2-го этапа) и вязкого газа. Учет вязкости приводит к качественному изменению картины течения газа в канале: ударные волны в вязком газе размазываются, и возникает новая система скачков функций, обусловленная особенностями течения газа вследствие условий прилипания газа на твердых поверхностях.

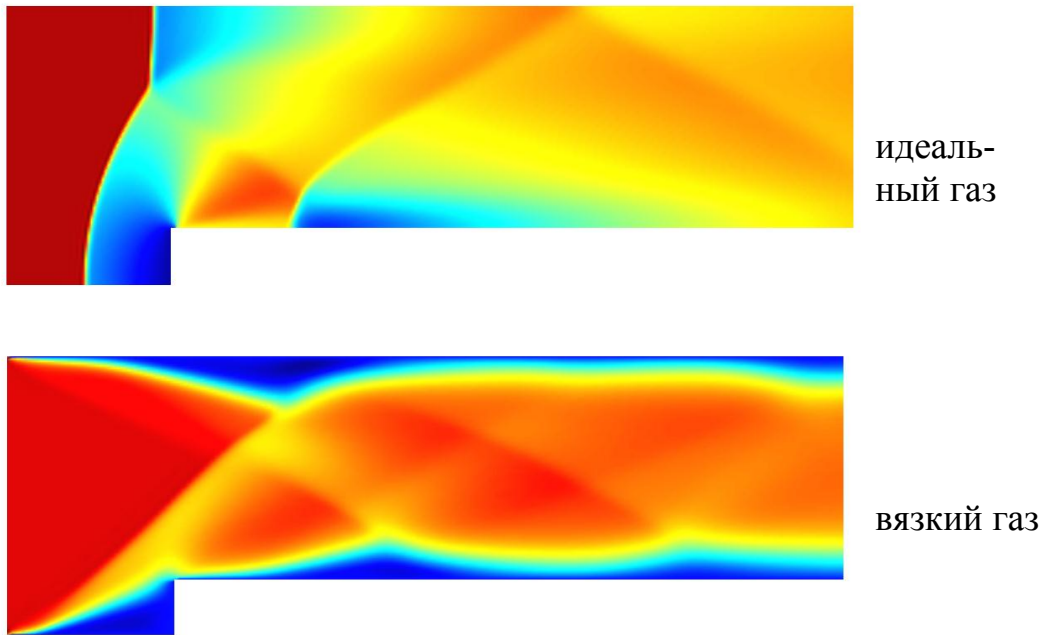


Рис.1 Продольная компонента скорости газа в канале (установившийся режим) (м/с) для случая идеального и вязкого газа.

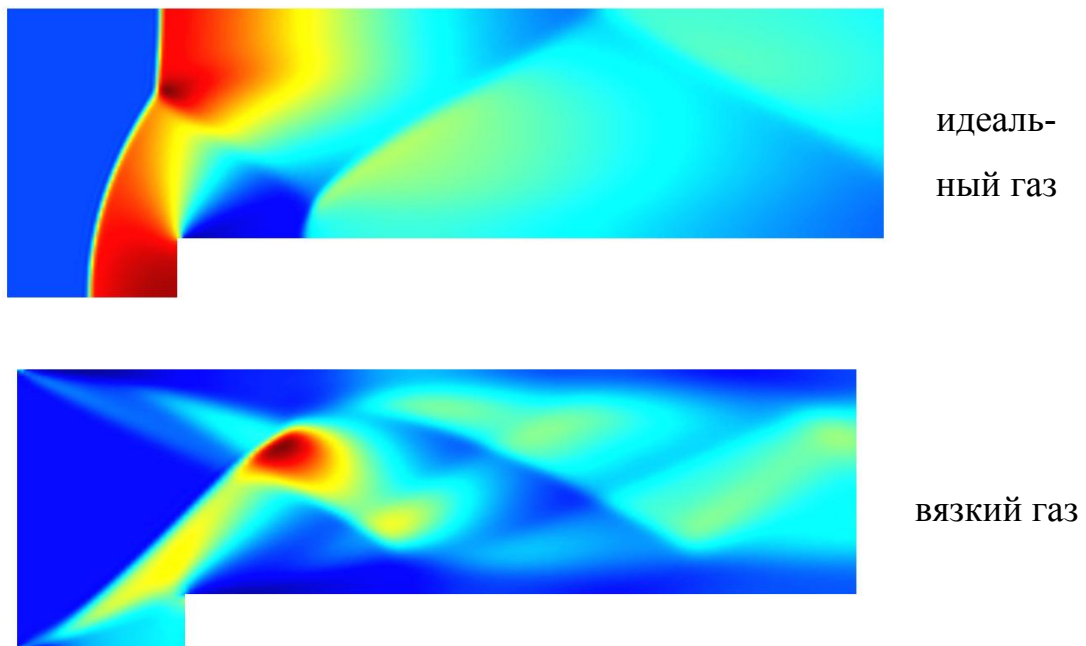


Рис.2 Распределение плотности газа в канале (установившийся режим) (кг/м^3) для случая идеального и вязкого газа.

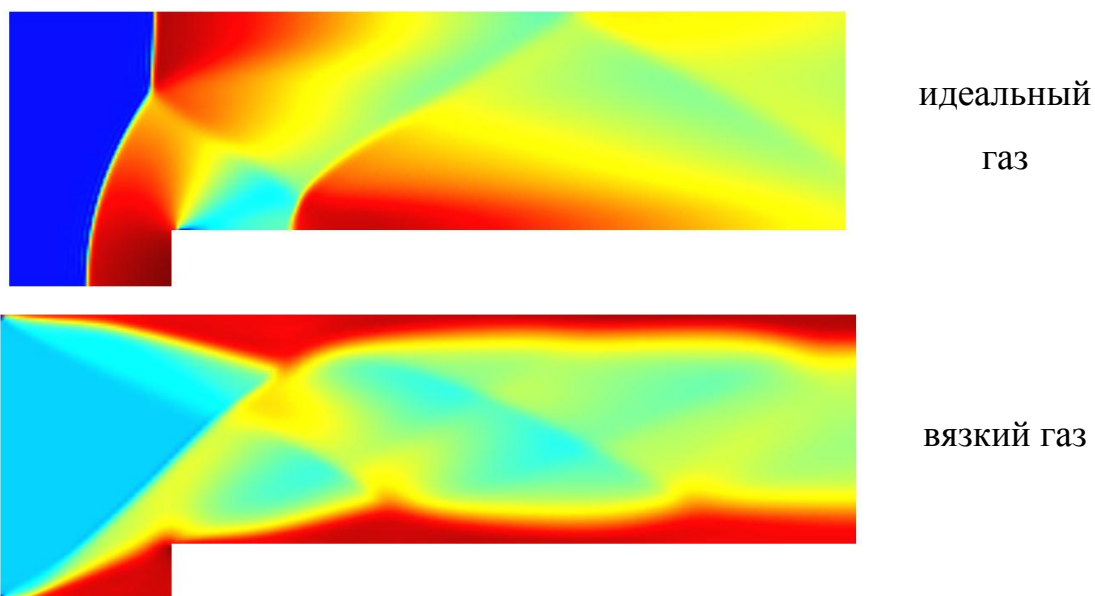


Рис.3 Распределение температуры в канале (установившийся режим) (К) для случая идеального и вязкого газа.

Был проведен ряд исследований с различными разностными сетками: 1) крупной сеткой $50 \times 150 = 6501$ узлов, 2) уменьшенной сеткой $120 \times 150 = 15391$ узлов, 3) мелкой сеткой $200 \times 300 = 50901$ узлов. Было установлено, что при крупной сетке, решение получается не физическим: поток газа тормозится на входе в канал и не протекает в него. Расчеты для уменьшенной сетки, для которой измельчение проводилось по высоте, показаны на рис.1-3, для нее результаты получались физическими, картина течения отражала структуру скачков отражения и уплотнения в канале. Если рассмотреть более мелкую сетку 3) то решение имеет такой же качественный характер, как и для сетки 2), улучшения заключаются в более точной аппроксимации значений и в уменьшенном погранслое.

Проводились также расчеты со сгущающимися (неравномерными) сетками, в которых сгущение производилось в окрестности ступеньки по одному или двум координатным направлениям. Было установлено, что такое сгущение искажает решение и не приводит к повышению точности результатов. Результаты тестов проведенных на различных геометриях показали, что для расчета следует выбирать максимальный шаг по времени, так как его измельчение не улучшает расчет, а лишь приводит к увеличению времени расчета.

В целях сокращения времени вычислений было принято решение применить алгоритм распараллеливания программного кода. Так как распараллеливание на основе библиотек с распределенной памятью (например MPI) требует разработки оптимальной декомпозиции геометрии и привлечения мощной многопроцессорной техники, то было применено распараллеливание на основе библиотеки OpenMP, которая предназначена для распараллеливания программ на машинах с общей памятью, в том числе и на персональных многоядерных

компьютерах. OpenMP реализует параллельное выполнение циклов с независимыми вычислениями. В данной программе к таким циклам относятся циклы вычисления газодинамических параметров на основе разностных аналогов, которые занимают наибольшую часть расчетного времени. В табл.1 приведены временные затраты рассмотренной задачи «о ступеньке» для компьютера с различным числом подключенных ядер.

Табл. 1 Временные затраты для различных ядер.

Ступенька, количество узлов сетки – 15391			
Количество ядер	Время расчета	Время в секундах	Количество временных слоев в секунду
1	06 ч. 47 мин. 21 сек.	24468	5.45
2	04 ч. 20 мин. 33 сек.	15631	8.53
3	03 ч. 19 мин. 14 сек.	11958	11.15
4	02 ч. 54 мин. 43 сек.	10482	12.72

В результате применения описанной техники распараллеливания было достигнуто более чем 2-кратное сокращение машинного времени расчета при использовании 4-х ядерных компьютеров.

Список литературы:

1. Ю.И. Димитриенко, С.Г. Изотова, С.Н. Ануфриев, А.А. Захаров. Численное моделирование трехмерных газодинамических процессов в камерах сгорания РДТТ на основе метода геометрически-адаптивных сеток // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки.- 2005. №.32. - С. 45-58.
2. Ю.И. Димитриенко, А.А. Захаров Разработка метода ленточных адаптивных сеток для решения трехмерных задач течения газов в воздухозаборниках // Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Естественные науки. - 2006. №. 3. - С. 44-56.
3. Ю.И. Димитриенко, А.А. Захаров Метод ленточных адаптивных сеток в газовой динамике. -М.: Изд-во НТЦ «Университетский», 2008. -175 с.