**Приложение III**

# СПРАВОЧНО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ

## Некоторые часто встречающиеся постоянные

| Величина | $n$ | $\lg n$ | Величина | $n$ | $\lg n$ | Величина | $n$ | $\lg n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | 3,141 6 | 0,497 1 | $1/\pi$ | 0,318 3 | $\bar{1}$,502 9 | $\sqrt[3]{\pi}$ | 1,464 6 | 0,165 7 |
| $2\pi$ | 6,283 2 | 0,798 2 | $1/2\pi$ | 0,159 2 | $\bar{1}$,201 8 | $\sqrt[3]{1/\pi}$ | 0,682 8 | $\bar{1}$,834 3 |
| $3\pi$ | 9,424 8 | 0,974 3 | $1/3\pi$ | 0,106 1 | $\bar{1}$,025 7 | $\sqrt[3]{\pi/6}$ | 0,806 0 | $\bar{1}$,906 3 |
| $4\pi$ | 12,566 4 | 1,099 2 | $1/4\pi$ | 0,079 6 | $\bar{2}$,900 8 | $\sqrt[3]{3/4\pi}$ | 0,620 4 | $\bar{1}$,792 6 |
| $4\pi/3$ | 4,188 8 | 0,622 1 | $\pi^2$ | 9,869 6 | 0,994 3 | $\sqrt[3]{\pi^2}$ | 2,145 0 | 0,331 4 |
| $\pi/2$ | 1,570 8 | 0,196 1 | $2\pi^2$ | 19,739 2 | 1,295 3 | $e$ | 2,718 3 | 0,434 3 |
| $\pi/3$ | 1,047 2 | 0,020 0 | $\sqrt{\pi}$ | 1,772 5 | 0,248 6 | $e^2$ | 7,389 1 | 0,868 6 |
| $\pi/4$ | 0,785 4 | $\bar{1}$,895 1 | $\sqrt{2\pi}$ | 2,506 6 | 0,399 1 | $\sqrt{e}$ | 1,648 8 | 0,217 1 |
| $\pi/6$ | 0,523 6 | $\bar{1}$,719 0 | $\sqrt{\pi/2}$ | 1,253 3 | 0,098 1 | $\sqrt[3]{e}$ | 1,395 6 | 0,144 8 |
| $\pi/180$ | 0,017 5 | $\bar{2}$,241 9 | $\sqrt{1/\pi}$ | 0,564 2 | $\bar{1}$,751 4 | $1/e$ | 0,367 6 | $\bar{1}$,565 7 |
| $2/\pi$ | 0,636 6 | $\bar{1}$,803 9 | $\sqrt{2/\pi}$ | 0,797 9 | $\bar{1}$,901 9 | $1/e^2$ | 0,135 3 | $\bar{1}$,131 4 |
| $180/\pi$ | 57,295 8 | 1,758 1 | $\sqrt{3/\pi}$ | 0,977 2 | $\bar{1}$,990 0 | $\sqrt{1/e}$ | 0,606 5 | $\bar{1}$,782 9 |
| $10800/\pi$ | 3 437,746 7 | 3,536 3 | $\sqrt{4/\pi}$ | 1,128 4 | 0,052 5 | ln10 | 2,302 6 | 0,362 2 |
| $648000/\pi$ | 206 264,81 | 5,314 4 | | | | | | |

## Основные формулы элементарной математики

### Арифметика и алгебра

#### Пропорции

В пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ числа $a$ и $d$ называются крайними членами, $b$ и $c$ — средними; основное свойство пропорции: произведение крайних членов равно произведению средних, то есть $ad = bc$.

Производные пропорции:

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}, \quad \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

#### Действия со степенями

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

#### Действия с корнями

(корни предполагаются арифметическими, то есть подкоренное выражение $\geqslant 0$ и, кроме того, сам корень берётся со знаком +)

$$\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c},$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p = \sqrt[m]{a^{np}}, \quad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}.$$

#### Разложение на множители

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{ (разность квадратов)},$$

$$(a^n \pm b^n) = (a \pm b)(a^{n-1} \mp a^{n-2}b \pm \ldots + (\mp 1)^{n-1}b^{n-1}),$$

в частности,

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{(сумма кубов)},$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{(разность кубов)}.$$

#### Квадратные уравнения

Уравнение $x^2 + px + q = 0$ решается по формуле

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ решается по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$.

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

#### Прогрессии

$a_1$ — первый член, $a_n$ — $n$-й член, $d$ — разность арифметич. прогрессии;

$u_1$ — первый член, $u_n$ — $n$-й член, $q$ — знаменатель геометрич. прогрессии;

$S_n$ — сумма $n$ членов прогрессии, $S$ — сумма бесконечно убывающей прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n-1), \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad S_n = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2};$$

$$u_n = u_1q^{n-1}, \quad S_n = \frac{u_nq - u_1}{q-1}; \quad S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1}, \quad S = \frac{u_1}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

#### Логарифмы

($N>0$, $a>0$ и $a \neq 1$)

Запись $\log_a N = x$ равносильна записи $a^x = N$, поэтому $a^{\log_a N} = N$.

Логарифмирование:

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0,$$

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N, \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,$$

$$\log_a N^m = m \log_a N, \quad \log_a \sqrt[m]{N} = \frac{1}{m} \log_a N.$$

Обозначения: $\log_{10} N = \lg N$, $\log_e N = \ln N$.

Соотношения:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b},$$

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

(число $\log_b a$ в последней формуле называется модулем перехода от системы логарифмов с основанием $b$ к системе с основанием $a$).

### Комбинаторика

$A_m^n = m(m-1)\ldots(m-n+1)$ (размещения);

$P_m = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m = m!$ (перестановки);

$C_m^n = \dfrac{A_m^n}{P_n} = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$ (сочетания).

### Бином Ньютона

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1}a + \ldots + C_m^k x^{m-k}a^k + \ldots + C_m^{m-1} x a^{m-1} + a^m,$$

в частности,

$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$ (квадрат суммы);

$(x-a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$ (квадрат разности);

$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$ (куб суммы);

$(x-a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$ (куб разности).

Свойства биномиальных коэффициентов $C_m^n$:

$$1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + 1 = 2^m,$$

$$1 - C_m^1 + C_m^2 - \ldots + (\pm 1)^m = 0, \quad C_m^n = C_m^{m-n}.$$

### Геометрия и тригонометрия

#### Длина окружности $C$ и её дуги $l$

$C = 2\pi R$, $l = \dfrac{\pi R a}{180} = R\alpha$ ($a$ — градусная мера дуги, $\alpha$ — радианная мера, $R$ — радиус).

#### Площади

Треугольник: $S = \dfrac{ah}{2}$ ($a$ — основание, $h$ — высота);

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ($p$ — полупериметр, $a$, $b$ и $c$ — стороны);

$S = \dfrac{ab\sin C}{2}$ ($C$ — угол, противолежащий стороне $c$).

Для равностороннего треугольника $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ($a$ — сторона треугольника).

Параллелограмм: $S = bh$ ($b$ — основание, $h$ — высота).

Ромб: $S = \dfrac{d_1 d_2}{2}$ ($d_1$ и $d_2$ — диагонали).

Трапеция: $S = \dfrac{a+b}{2}h$ ($a$ и $b$ — основания, $h$ — высота).

Правильный многоугольник: $S = \dfrac{Pa}{2}$ ($P$—периметр, $a$—апофема).

Круг: $S = \pi R^2$.

Круговой сектор: $S = \dfrac{Rl}{2} = \dfrac{R^2\alpha}{2} = \dfrac{\pi R^2 a}{360}$ ($a$ — градусная мера дуги сектора, $\alpha$ — радианная мера, $l$ — длина дуги сектора).

#### Поверхности

Призма: $S_{бок} = Pl$ ($P$ — периметр перпендикулярного сечения, $l$ — боковое ребро).

Правильная пирамида: $S_{бок} = \dfrac{Pa}{2}$ ($P$ — периметр основания, $a$ — апофема).

Правильная усечённая пирамида: $S_{бок} = \dfrac{P_1 + P_2}{2}a$ ($P_1$ и $P_2$ — периметры оснований, $a$ — апофема).

Цилиндр: $S_{бок} = 2\pi Rh$ ($h$ — высота).

Конус: $S_{бок} = \pi Rl$ ($l$ — образующая).

Усечённый конус: $S_{бок} = \pi(R_1 + R_2)l$.

Шар: $S = 4\pi R^2$.

#### Объёмы

Призма: $V = Sh$ ($S$ — площадь основания, $h$ — высота).

Пирамида: $V = \dfrac{Sh}{3}$.

Усечённая пирамида: $V = \dfrac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$.

Цилиндр: $V = \pi R^2 h$.

Конус: $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

Усечённый конус: $V = \dfrac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)$.

Шар: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

#### Перевод градусной меры угла в радианную и обратно

$\alpha = \dfrac{\pi\cdot a^\circ}{180^\circ}$, $a^\circ = \dfrac{\alpha\cdot 180^\circ}{\pi}$ ($\alpha$ — радианная мера угла, $a$ — градусная).

#### Основные соотношения между тригонометрическими функциями

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$,

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

#### Формулы приведения

$\sin(\alpha + n\pi) = \pm\sin\alpha$, $\cos(\alpha + n\pi) = \pm\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha + n\pi) = \operatorname{tg}\alpha$,

$\sin\left(\alpha + n\dfrac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha$, $\cos\left(\alpha + n\dfrac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\left(\alpha + n\dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$

(в формулах первой строки $n$ может быть любым целым числом, причём верхний знак соответствует значению $n = 2k$, а нижний— значению $n = 2k + 1$; в формулах второй строки $n$ может быть только нечётным числом, причём верхний знак берётся при $n = 4k + 1$, а нижний — при $n = 4k - 1$).

#### Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

#### Значения тригонометрических функций для значений аргумента $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$

| Аргумент | | Тригонометрические функции | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| В градусном измерении | В радианах | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sec\alpha$ | $\operatorname{cosec}\alpha$ |
| 0° | 0 | 0 | 1 | 0 | не существует | 1 | не существует |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$ | $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774$ | $\sqrt{3} \approx 1{,}7322$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}1547$ | 2 |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$ | 1 | 1 | $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ | $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3} \approx 1{,}7322$ | $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774$ | 2 | $\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}1547$ |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | не существует | 0 | не существует | 1 |

### Двойные и половинные углы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha,$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

### Формулы преобразования сумм и разностей тригонометрических функций в произведения

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

### Формулы преобразования произведений тригонометрических функций в суммы и разности

$$\sin m\alpha\cos n\alpha = \frac{1}{2}[\sin(m+n)\alpha + \sin(m-n)\alpha],$$

$$\sin m\alpha\sin n\alpha = \frac{1}{2}[\cos(m-n)\alpha - \cos(m+n)\alpha],$$

$$\cos m\alpha\cos n\alpha = \frac{1}{2}[\cos(m+n)\alpha + \cos(m-n)\alpha].$$

### Соотношения между элементами прямоугольного треугольника

($a$, $b$ — катеты, $c$ — гипотенуза, $A$, $B$ — острые углы, $C$ — прямой)

$$a = c\sin A = c\cos B,\qquad b = c\sin B = c\cos A,$$
$$a = b\operatorname{tg} A = b\operatorname{tg} B,\qquad b = a\operatorname{tg} B = a\operatorname{ctg} A.$$

### Соотношения между элементами произвольного треугольника

($a$, $b$, $c$ — стороны, $A$, $B$, $C$ — противолежащие им углы)

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Теорема тангенсов: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$.

## Основные формулы математического анализа

### Неравенства

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,\quad 0 < x < \pi/2,$$
$$\sin x > 2x/\pi,\quad -\pi/2 < x < \pi/2,$$
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,\quad -\pi < x < \pi,$$
$$e^x > 1 + x,$$
$$e^x < 1/(1-x),\quad x < 1,$$
$$e^{-x/(1-x)} < 1 - x < e^{-x},\quad x < 1,$$
$$x/(1+x) < \ln(1+x) < x,\quad x > -1,$$
$$x < -\ln(1-x) < x/(1-x),\quad x < 1,$$
$$|\ln(1-x)| < 3x/2,\quad 0 < x < 0{,}5828\ldots$$

Приведённые неравенства обращаются в равенства при $x = 0$.

### Производные

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f^{(r)}(x)$ |
|---|---|---|
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r+1)x^{\alpha-r}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $(-1)^{r-1}(r-1)!\,\dfrac{1}{x^r}$ |
| $a^x$ | $a^x\ln a$ | $a^x(\ln a)^r$ |
| $\log_a x$ | $\dfrac{1}{x\ln a}$ | $(-1)^{r-1}(r-1)!\,\dfrac{1}{x^r\ln a}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\sin\left(x + r\dfrac{\pi}{2}\right)$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\cos\left(x + r\dfrac{\pi}{2}\right)$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{tg} x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ |
| $\sec x$ | $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{th} x$ | $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ |
| $\operatorname{cosec} x$ | $-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ | $\operatorname{cth} x$ | $-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ |
| $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{ar\,sh} x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $\arccos x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{ar\,ch} x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\operatorname{arc\,tg} x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{ar\,th} x$ | $\dfrac{1}{1-x^2}$ |
| $\operatorname{arc\,ctg} x$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{ar\,cth} x$ | $\dfrac{1}{1-x^2}$ |

### Пределы

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7183,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x} = \ln c,\quad c > 0,$$

$$\lim_{x\to 0+} x^x = 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\omega x}{x} = \omega,\quad -\infty < \omega < +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} x^a\ln x = \lim_{x\to+\infty} x^{-a}\ln x = \lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x} = 0,\quad a > 0.$$

### Неопределённые интегралы

(основная таблица, $C$ — произвольная постоянная)

$\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\quad \alpha \neq -1;$

$\int\dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\quad a > 1,\quad a \neq 1$, в частности

$\int e^x\,dx = e^x + C;$

$\int\sin x\,dx = -\cos x + C;$

$\int\cos x\,dx = \sin x + C;$

$\int\dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

$\int\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

$\int\operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$

$\int\operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$

$\int\dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

$\int\dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$

$\int\dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{x}{a} + C;$

$\int\dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$

$\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C,\quad |x| < |a|;$

$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$ (когда под корнем стоит $x^2 - a^2$, предполагается, что $|x| > |a|$).

## Некоторые определённые интегралы

### Интегралы от показательной функции (в сочетании с алгебраическими, тригонометрическими и логарифмической)

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} \text{ при } a>0,\ n>-1,\ \Gamma(x) \text{ — гамма-функция},$$

в частности, при $n>0$ целом этот интеграл равен $n!/a^{n+1}$;

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{(n+1)/2}} \text{ при } a>0,\ n>-1,$$

в частности, при $n$ целом чётном ($n=2k$) этот интеграл равен

$$\frac{1\cdot 3 \ldots (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1}a^{k+1/2}},$$

а при $n$ целом нечётном ($n=2k+1$) равен $k!/2a^{k+1}$;

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \text{ при } a>0;$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} \text{ при } a>0;$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-b^2/4a^2} \text{ при } a>0;$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12};$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arc\,ctg} a = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} \text{ при } a>0;$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -C \approx -0{,}577\,2.$$

### Интегралы от тригонометрических функций (в сочетании с алгебраическими)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha+1}x\cos^{2\beta+1}x\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)};$$

при $\alpha$ и $\beta$ целых положительных этот интеграл равен $\alpha!\beta!/2(\alpha+\beta+1)!$.

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ при } a>0, \\ -\frac{\pi}{2} \text{ при } a<0; \end{cases}$$

$$\int_0^\alpha \frac{\cos ax\,dx}{x} = \infty, \quad \alpha \text{ — произвольное число};$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ при } a>0, \\ -\frac{\pi}{2} \text{ при } a<0; \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a};$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\cos ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ при } |a|<1, \\ \frac{\pi}{4} \text{ при } |a|=1, \\ 0 \text{ при } |a|>1; \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{a^2+x^2}\,dx = \pm\frac{\pi}{2}e^{-ab}, \text{ знак совпадает со знаком числа } b;$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a};$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}|a|;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k} \text{ при } |k|<1;$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k}\arcsin k \text{ при } |k|<1;$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos ax\,dx}{1-2b\cos x+b^2} = \frac{\pi b^a}{1-b^2} \text{ при } a \text{ целом} \geqslant 0, \quad |b|<1.$$

### Интегралы от логарифмической функции (в сочетании с алгебраическими и тригонометрическими)

$$\int_0^1 \ln\ln x\,dx = -C \approx -0{,}577\,2;$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx = -\frac{\pi^2}{12};$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8};$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2;$$

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right)^a dx = \Gamma(a+1), \quad -1<a<\infty;$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2;$$

$$\int_0^\pi x\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2\ln 2}{2};$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\ln\sin x\,dx = \ln 2 - 1;$$

$$\int_0^\pi \ln(a \pm b\cos x)\,dx = \pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2} \text{ при } a \geqslant b;$$

$$\int_0^\pi \ln(a^2-2ab\cos x+b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi\ln a, & a \geqslant b > 0, \\ 2\pi\ln b, & b \geqslant a > 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln\operatorname{tg} x\,dx = 0;$$

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

### Интегралы от алгебраических функций

$$\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\,dx = 2\int_0^1 x^{2\alpha+1}(1-x^2)^\beta\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)};$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^a} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \text{ при } a<1;$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1-x)x^a} = -\pi\operatorname{ctg} a\pi \text{ при } a<1;$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx = \frac{\pi}{b\sin\frac{a\pi}{b}} \text{ при } 0<a<b;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{2\sin a}, \quad 0<a<\frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{\sin a}, \quad 0<a<\frac{\pi}{2}.$$

## Суммы некоторых числовых рядов

$$1+\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} = e; \qquad 1+\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e};$$

$$1+\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)!} = \operatorname{ch} 1; \qquad 1+\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \cos 1;$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)!} = \operatorname{sh} 1; \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} = \sin 1;$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}; \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}; \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90};$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}; \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450};$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2; \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4};$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}; \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = 1;$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}; \qquad \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{3}{4};$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4};$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m)} = \frac{1}{mm!}, \quad m=1,2,\ldots;$$

$$\sum_{k=0}^\infty a^k = \frac{1}{1-a}, \quad |a|<1, \text{ бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.}$$

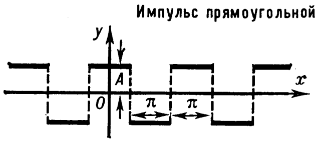
## Разложение некоторых функций в степенные ряды

| Функция | Разложение в ряд | Область сходимости |
|---|---|---|
| | **Биномиальный ряд** | |
| $(a\pm x)^m$ | преобразованием к виду $a^m \left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^m$ сводится к нижеследующим рядам | $\lvert x\rvert \leqslant a$ при $m>0$, $\lvert x\rvert < a$ при $m<0$ |
| | **Биномиальные ряды с положительным показателем** | |
| $(1\pm x)^m$, $m>0$ | $1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$ $\dots + (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$ | $\lvert x\rvert \leqslant 1$ |
| $(1\pm x)^{1/4}$ | $1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}x^2 \pm \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 + \dots$ | $\lvert x\rvert \leqslant 1$ |
| $(1\pm x)^{1/3}$ | $1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 \pm \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \pm \dots$ | $\lvert x\rvert \leqslant 1$ |
| $(1\pm x)^{1/2}$ | $1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \dots$ | $\lvert x\rvert \leqslant 1$ |
| $(1\pm x)^{3/2}$ | $1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \dots$ | $\lvert x\rvert \leqslant 1$ |
| | **Биномиальные ряды с отрицательным показателем** | |
| $(1\pm x)^{-m}$, $m>0$ | $1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3 + \dots$ $\dots + (\pm 1)^n \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!}x^n \pm \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $(1\pm x)^{-1/4}$ | $1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}x^2 \mp \frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 + \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \mp \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $(1\pm x)^{-1/3}$ | $1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 \mp \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \mp \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $(1\pm x)^{-1/2}$ | $1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $(1\pm x)^{-1}$ | $1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $(1\pm x)^{-3/2}$ | $1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $(1\pm x)^{-2}$ | $1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $(1\pm x)^{-3}$ | $1 \mp \frac{1}{1\cdot 2}(2\cdot 3x \mp 3\cdot 4x^2 + 4\cdot 5x^3 \mp 5\cdot 6x^4 + \dots)$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $(1\pm x)^{-4}$ | $1 \mp \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cdot 3\cdot 4x \mp 3\cdot 4\cdot 5x^2 + 4\cdot 5\cdot 6x^3 \mp 5\cdot 6\cdot 7x^4 + \dots)$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| | **Тригонометрические функции** | |
| $\sin x$ | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \dots$ | $\lvert x\rvert < \infty$ |
| $\cos x$ | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \dots$ | $\lvert x\rvert < \infty$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$ | $\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $\frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \dots\right]$ | $0 < \lvert x\rvert < \pi$ |
| $\sec x$ | $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots$ | $\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{cosec} x$ | $\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \frac{127}{604800}x^7 + \dots$ | $0 < \lvert x\rvert < \pi$ |

| Функция | Разложение в ряд | Область сходимости |
|---|---|---|
| | **Показательная функция** | |
| $e^x$ | $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ | $\lvert x\rvert < \infty$ |
| $a^x = e^{x\ln a}$ | $1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \frac{(x\ln a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x\ln a)^n}{n!} + \dots$ | $x\rvert < \infty$ |
| | **Логарифмическая функция** | |
| $\ln x$ | $2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots + \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} + \dots\right]$ | $x > 0$ |
| $\ln x$ | $(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} \pm \dots$ | $0 < x \leqslant 2$ |
| $\ln x$ | $\frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \dots + \frac{(x-1)^n}{nx^n} + \dots$ | $x > \frac{1}{2}$ |
| $\ln(1+x)$ | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \pm \dots$ | $-1 < x \leqslant 1$ |
| $\ln(1-x)$ | $-\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots\right]$ | $-1 \leqslant x < 1$ |
| $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ | $2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\right]$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| | **Обратные тригонометрические функции** | |
| $\arcsin x$ | $x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)(2n+1)} + \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\arccos x$ | $\frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)(2n+1)} + \dots\right]$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\operatorname{arc\,tg} x$ | $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots$ | $\lvert x\rvert > 1$ |
| | $= \pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} \pm \dots$ | $\lvert x\rvert > 1$ |
| $\operatorname{arc\,ctg} x$ | $\frac{\pi}{2} - \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots\right]$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| | **Гиперболические функции** | |
| $\operatorname{sh} x$ | $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$ | $\lvert x\rvert < \infty$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ | $\lvert x\rvert < \infty$ |
| $\operatorname{th} x$ | $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$ | $\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{cth} x$ | $\frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots$ | $0 < \lvert x\rvert < \pi$ |
| | **Обратные гиперболические функции** | |
| $\operatorname{Ar\,sh} x$ | $x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\operatorname{Ar\,ch} x$ | $\pm\left[\ln(2x) - \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \right.$ | $\lvert x\rvert > 1$ |
| $\operatorname{Ar\,th} x$ | $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\operatorname{Ar\,cth} x$ | $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots$ | $\lvert x\rvert > 1$ |

## Гармонический состав (разложение в ряд Фурье) некоторых периодических импульсов

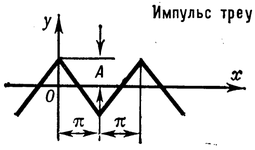
### Импульс прямоугольной формы




$$y=\begin{cases} A, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2} \\ -A, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$y=\frac{4A}{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{7}\cos 7x+\ldots\right.$$

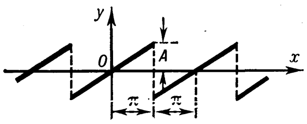
### Импульс треугольной формы




$$y=\begin{cases} \dfrac{2A}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right), & 0\leqslant x<\pi \\ \dfrac{2A}{\pi}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right), & \pi\leqslant x<2\pi \end{cases}$$

$$y=\frac{8A}{\pi^2}\left(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x+\frac{1}{49}\cos 7x+\ldots\right)$$

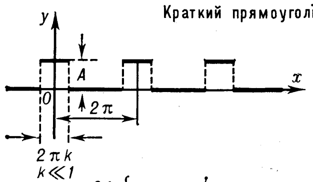
### Импульс пилообразной формы




$$y=\frac{Ax}{\pi},\quad -\pi\leqslant x<\pi$$

$$y=\frac{2A}{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\right.$$

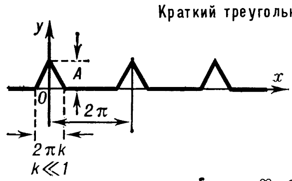
### Краткий прямоугольный




$$y=\begin{cases} A, & -\pi k\leqslant x<\pi k \\ 0, & \pi k\leqslant x<2\pi-\pi k \end{cases}$$

$$y=\frac{2A}{\pi}\left\{k\pi+2\left(\sin k\pi\cos x+\frac{1}{2}\sin 2k\pi\cos 2x+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{3}\sin 3k\pi\cos 3x+\ldots\right)\right\}$$

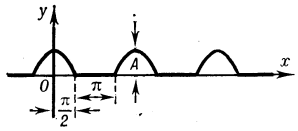
### Краткий треугольный




$$y=\begin{cases} \dfrac{A}{k\pi}(x+\pi k), & -\pi k\leqslant x<0 \\ \dfrac{A}{\pi k}(\pi k-x), & 0\leqslant x<\pi k \\ 0, & \pi k\leqslant x<2\pi-\pi k \end{cases}$$

$$y=A\left[\frac{k}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{n\pi}\sin n\pi k-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2}{n^2\pi^2 k}\left(n\pi k\sin n\pi k-2\sin^2\frac{n\pi k}{2}\right)\right\}\cos nx\right]$$

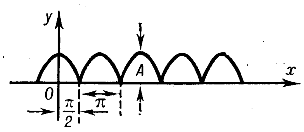
### Напряжение на выходе однополупериодного выпрямителя




$$y=\begin{cases} A\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$y=\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\cos x+\frac{2A}{\pi}\left\{\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{1}{15}\cos 4x+\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx+\ldots\right\}$$

### Напряжение на выходе двухпериодного выпрямителя




$$y=A\left|\cos x\right|$$

$$y=\frac{2A}{\pi}+\frac{4A}{\pi}\left\{\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{1}{15}\cos 4x+\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx+\ldots\right\}$$