

Анализ распределения напряжений в формовочном песке

Кварцевый песок является самым распространенным формовочным материалом в литейном производстве. Обычно он применяется в качестве компонента формовочных смесей, но при литье по газифицируемым моделям и вакуумно-пленочной формовке песок используется в чистом сухом состоянии. Сухой песок – это идеально сыпучая двухкомпонентная среда, состоящая из твердых частиц различной формы и размеров и воздуха, заполняющего пустоты между ними. При этом твердые песчинки, связанные между собой только за счет силы тяжести и взаимного трения, образуют так называемый твердый скелет, который и несет всю механическую нагрузку.

Математическое описание механики песка чаще всего базируется на традиционных представлениях механики сплошных сред и реологии. Песчаный массив описывается как некая усредненная по своим свойствам среда, составленная из бесконечного числа материальных точек. Несмотря на то, что данный подход за долгое время его использования хорошо себя зарекомендовал, особенно применительно к формовочным смесям, у него есть и явные ограничения. В частности, не учитывается внутренняя структура среды и ее влияние на распределение напряжений и механические свойства. А между тем подобное влияние не подлежит сомнению: например, согласно данным [1] модуль упругости песка может колебаться в пределах 5 – 25 МПа в зависимости от плотности. В реологии учитывается зависимость механических свойств от плотности, но лишь опосредованно, на основе экспериментов.

Под структурой зернистой среды в соответствии с [2] понимают упорядоченную посредством связей и отношений совокупность элементов среды (песчинок). При этом важно, что структура зернистого массива является не точным отражением геометрии среды, а ее упрощенной моделью, которая, тем не менее, отражает основные свойства реальной системы. Например, зерновой состав природного песчаного массива весьма богат и включает в

себя частицы, различающиеся по размеру и форме. Тем не менее, применяемые, в частности, при литье по газифицируемым моделям песчинки, как правило, имеют небольшой разброс по размерам и окатанную форму. Поэтому при расчете больших массивов песка можно провести усреднение по форме и размерам и представить песчаный массив как совокупность твердых шарообразных частиц среднего размера.

На основе подобного структурного подхода А.А. Кандауровым был разработан аппарат механики зернистых сред [2]. Зернистая среда определяется как система несвязанных частиц, взаимодействующих между собой посредством точечных контактов. Распределение напряжений в среде рассматривается как случайный процесс передачи нагрузки от верхних слоев к нижним слоям. Зернистые среды делятся на безраспорные, не способные к боковому распределению напряжений, и распорные, характеризующиеся коэффициентом распора ν . Для наших задач интересна именно вторая разновидность зернистых сред.

Кроме усреднения частиц по размеру и форме в модели зернистой среды [2] имеется еще одно важное допущение. Принято, что в пространственной задаче среднее число контактов на одну частицу равно 8 (в плоской задаче - 4). Данное положение выведено теоретически на основе рассмотрения наиболее вероятной упаковки частиц, как с точки зрения геометрических соображений, так и с точки зрения статической устойчивости. Это подтверждается и экспериментальными данными [3], для нерегулярных укладок одинаковых по размеру шаров проводились измерения числа контактов в зависимости от плотности. В частности, для пористости порядка 0,41 (что соответствует обычной насыпной плотности песка $\rho \approx 1500 \text{ кг/м}^3$) среднее число контактов примерно равно 8. Однако, при более высокой плотности укладки, число контактов увеличивается и для пористости 0,33 ($\rho = 1700 \text{ кг/м}^3$) составляет уже порядка 9 контактов на одну частицу.

На основе приведенных допущений в [2] была построена механическая модель зернистых сред. Для плоской задачи уравнение, описывающее распределение вертикальных напряжений σ_z , имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \nu z \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где x и z – горизонтальная и вертикальная координаты соответственно, ν – коэффициент распора зернистой среды.

Горизонтальные нормальные напряжения и касательные напряжения вычисляются по формулам:

$$\sigma_x = \nu \sigma_z + \nu z \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\tau_{xz} = -\nu z \frac{\partial \sigma_z}{\partial x}. \quad (3)$$

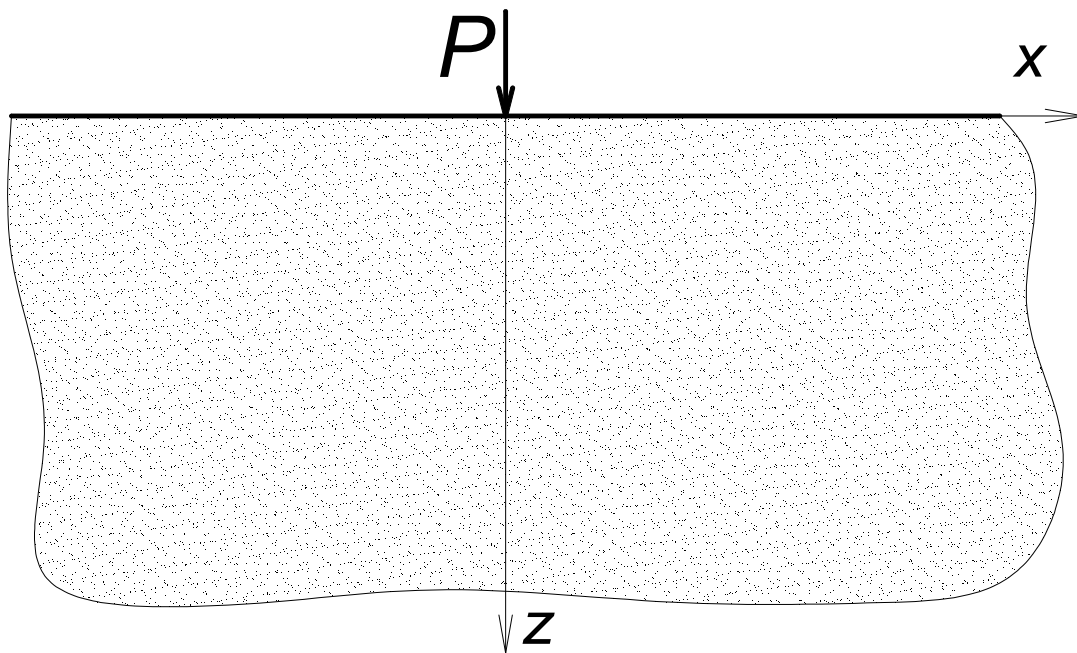


Рис. 1. Сосредоточенная сила, приложенная к полупространству

При этом распределение вертикальных напряжений от приложения к полупространству сосредоточенной силы P в начале координат (рис. 1) имеет вид:

$$\sigma_z(x, z) = \frac{P}{z\sqrt{2\pi\nu}} \cdot \text{Exp}\left(-\frac{x^2}{2\nu z^2}\right). \quad (4)$$

Вычислим вертикальные напряжения в песчаном массиве с учетом внешнего трения о стенки опоки на примере плоской задачи. Силу, приложенную к массиву, считаем равномерно распределенной по поверхности, а напряжения на поверхности условно равными 1: $f(x)=1$. Принимаем также: ширина «опоки» $L=0,4$ м, коэффициент распора среды $\nu=0,6$, коэффициент трения песка о стенки опоки $f_{mp}=0,4$. Расчетная схема изображена на рис. 2.

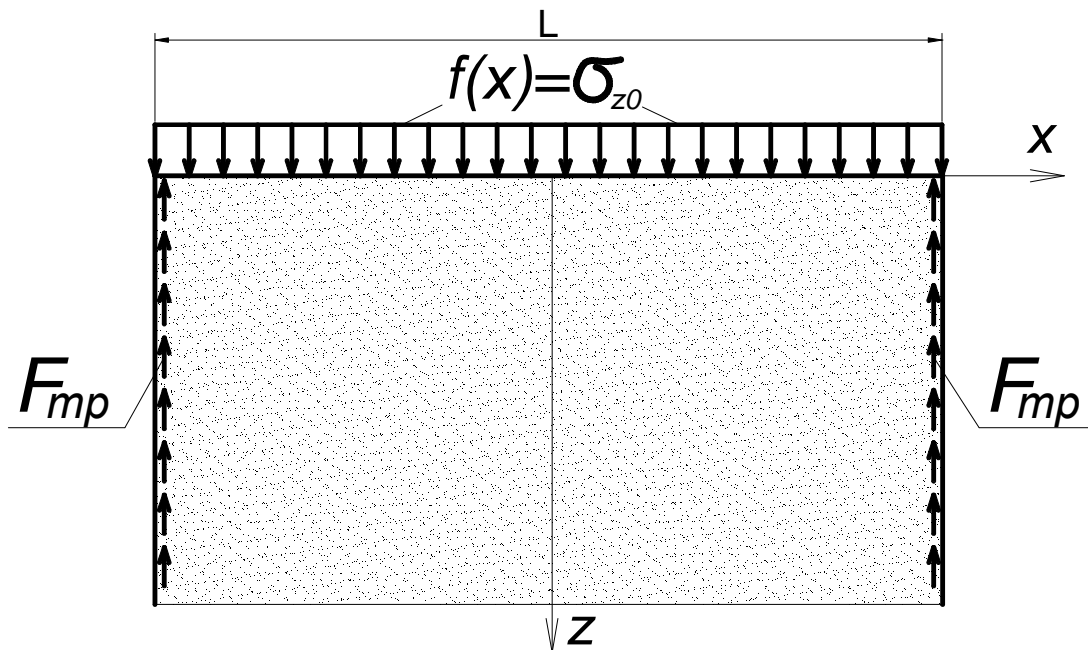


Рис. 2. Расчетная схема

Задача решается в несколько этапов. Сначала вычислим вертикальные напряжения, которые возникают в зернистом полупространстве (без учета стенок), от вертикальной нагрузки, распределенной по полосе $(-L/2, L/2)$. Значение этой функции нетрудно вычислить, исходя из формулы (4):

$$\sigma_z^0(x, z) = \frac{1}{z\sqrt{2\pi\nu}} \int_{-L/2}^{L/2} f(\xi) \cdot \text{Exp}\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\nu z^2}\right) d\xi. \quad (5)$$

График этой функции представлен на рис. 3.

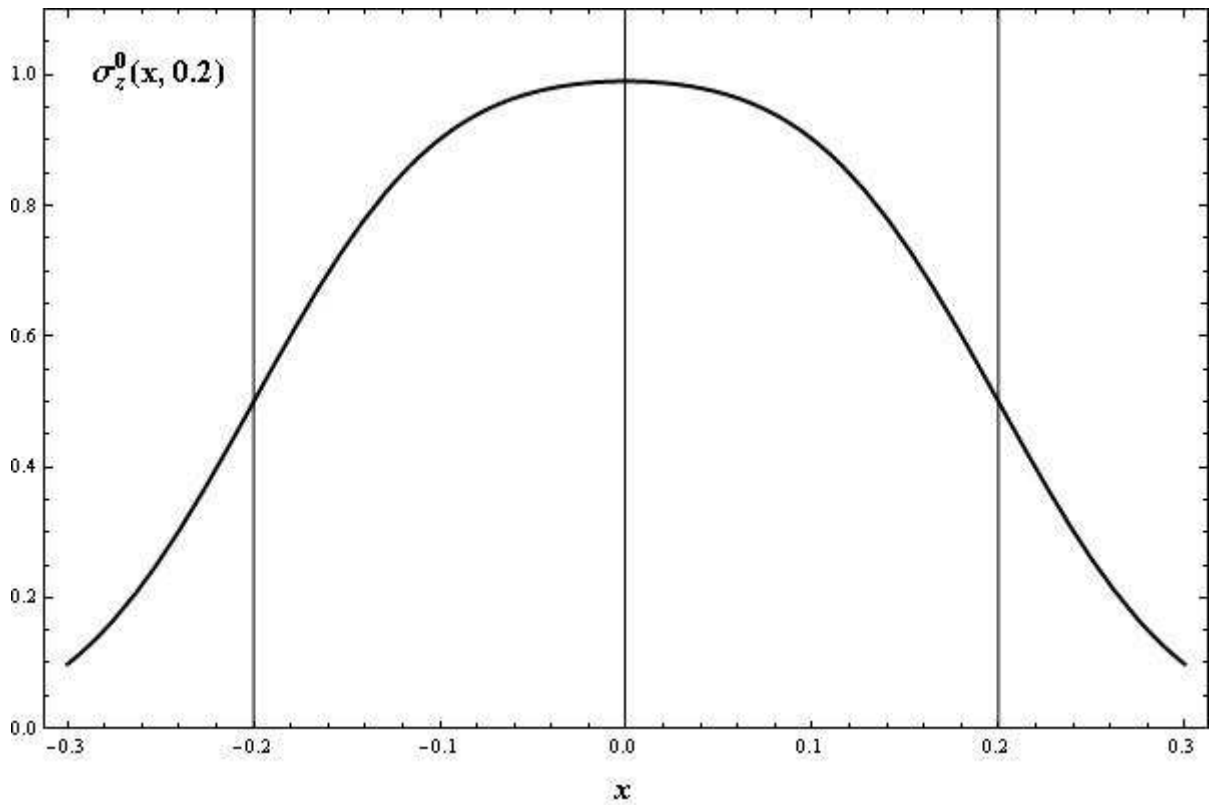


Рис. 3. Распределение вертикальных напряжений в полупространстве от равномерной нагрузки на поверхности для $z=0,2$

Однако при наличии вертикальных стенок сила не может распределяться дальше координат ($x=-0,2$; $x=0,2$), на рис. 3 этой «лишней» силе соответствуют ветви графика, уходящие за пределы интервала $(-0,2; 0,2)$. Эти напряжения будут как бы отражаться от стенок и, возвращаясь внутрь, суммироваться с основными напряжениями (рис. 4). Такой эффект назван в работе [2] «эффектом отражения».

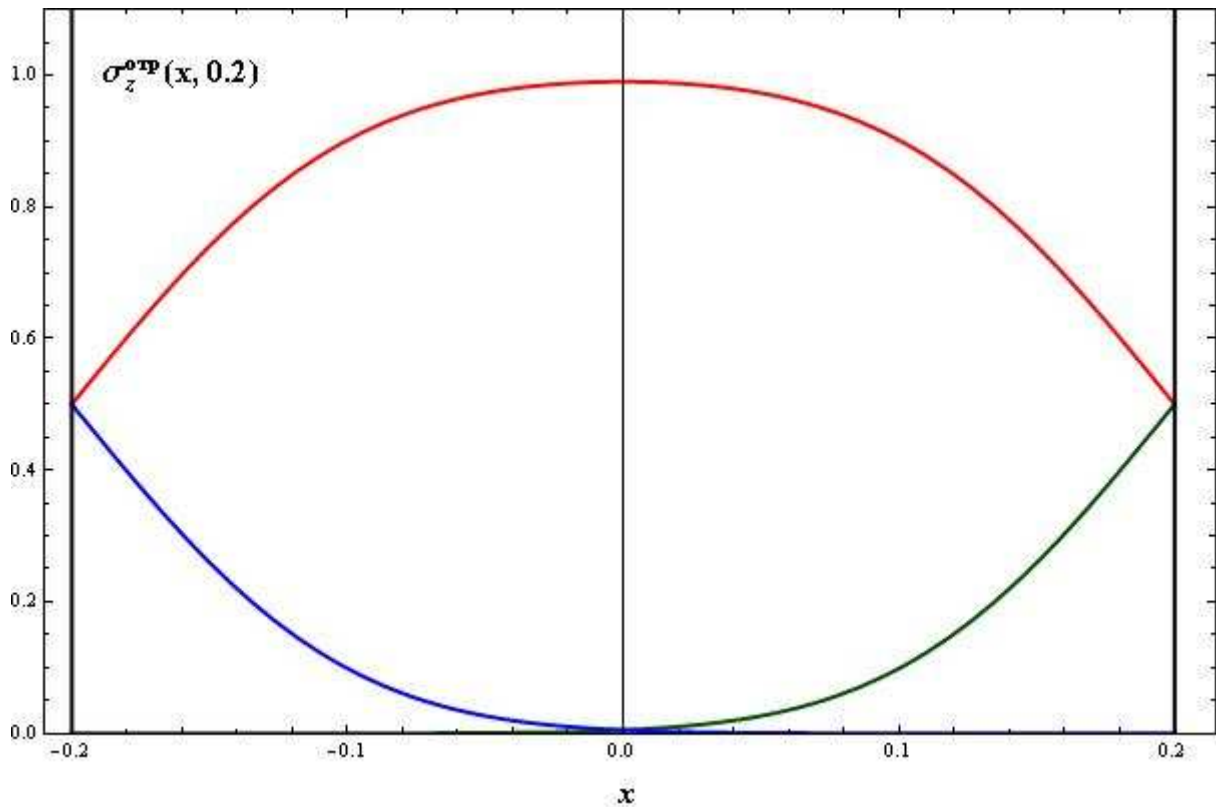


Рис. 4. Эффект отражения

Функция отраженных напряжений на краях быстро стремится к нулю, и с достаточной степенью точности можно взять только результат первого отражения, т. е.:

$$\sigma_z^{cm}(x, z) = \sigma_z^0(x, z) + \sigma_z^0(-x + L, z) + \sigma_z^0(-x - L, z) \quad (6)$$

Как видно из рис. 5, в итоге получаем равномерно распределенное напряжение, соответствующее нагрузке на поверхности. При этом видно, что без учета трения, вертикальные нормальные напряжения не изменяются с глубиной, то есть $\sigma_z^{cm}(x, z) = \sigma_z^{cm}(x, 0) = \sigma_{z0}(x) = 1$. Несмотря на то, что это весьма ожидаемый результат, важно, что он получен исходя из формул механики зернистых сред независимо от других предположений.

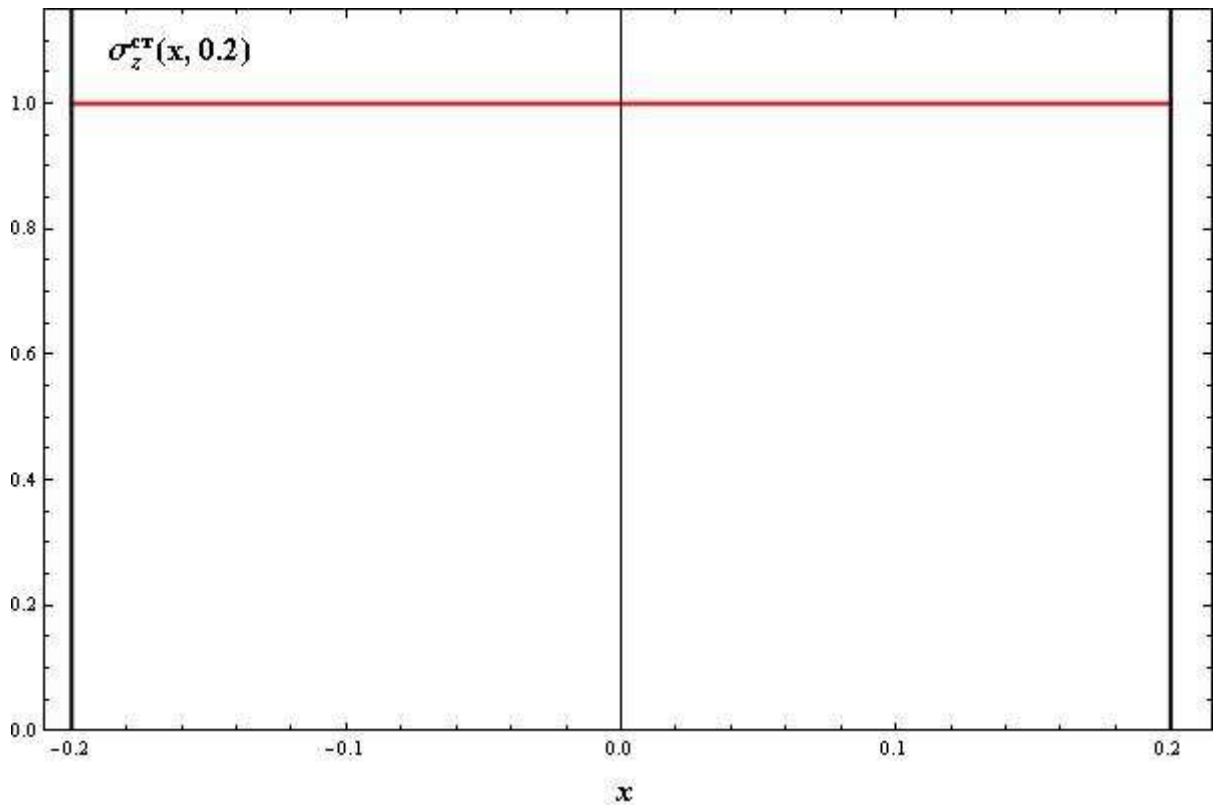


Рис. 5. Итоговое распределение напряжений без учета трения

Усложнение задачи - учет трения о стенки опоки, вычисляя предельные значения сил трения в соответствии с законом Амонтона – Кулона:

$$F_{mp} = N \cdot f_{mp} \quad \text{или для нашего случая:} \quad \tau_{mp} = \sigma_x \cdot f_{mp} \quad (7)$$

Сила трения может быть представлена как вертикальная сила, приложенная к массиву касательно, и выражающаяся функцией $\tau_{mp}(z)$. При этом, поскольку вертикальное нормальное напряжение не изменяется с глубиной,

$\frac{\partial \sigma_z^{cm}}{\partial z} = 0$, из формулы (2) следует: $\sigma_x = \nu \cdot \sigma_z$. Хорошо видно, что в этих условиях коэффициент распора ν имеет смысл коэффициента бокового давления, принятого в механике грунтов [1]. Таким образом, можно записать:

$$\tau_{mp}(z) = f_{mp} \cdot \sigma_x(L/2, z) = f_{mp} \nu \cdot \sigma_z^{cm}(L/2, z) = f_{mp} \nu \cdot \sigma_{z0} \quad (8)$$

В итоге получаем равномерно распределенную по высоте силу трения, которая создает поле вертикальных напряжений по линии $x=0$, противодействующее напряжению от приложенной нагрузки. Вычислить эти напряжения можно с использованием формул (4) и (5) и с учетом эффекта отражения:

$$\sigma_z^{mp} = -\tau_{mp} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \int_0^z \frac{1}{z-\eta} \cdot \text{Exp}\left(\frac{x^2}{2\nu(z-\eta)^2}\right) d\eta \quad (9)$$

С помощью замены переменных $u = z - \eta$ и несложных преобразований интеграл в формуле (9) может быть приведен к виду:

$$\int_0^z \frac{\text{Exp}\left(-\frac{x^2}{2\nu u^2}\right)}{u} du = \frac{1}{2} \Gamma\left(0, \frac{x^2}{2\nu z^2}\right), \quad (10)$$

где $\Gamma(0, x)$ – неполная гамма-функция Эйлера.

Таким образом, с учетом (8), (9) и (10) получаем:

$$\sigma_z^{mp}(x, z) = -\sigma_{z0} \cdot f_{mp} \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \Gamma\left(0, \frac{x^2}{2\nu z^2}\right) \quad (11)$$

Или с учетом специфики нашей задачи, общее напряжение от трения в «опорке» составит:

$$\sigma_{z \text{ общ}}^{mp}(x, z) = \sigma_z^{mp}(L+x, z) + \sigma_z^{mp}(L-x, z), \quad (12)$$

а итоговое вертикальное напряжение составит

$$\sigma_z(x, z) = \sigma_z^{cm}(x, z) + \sigma_z^{mp}(x, z) \quad (13)$$

В результате, получаем распределение напряжений в плоской задаче с учетом трения (13). Подобная зависимость для $z=0,2$ приведена на рис. 6.

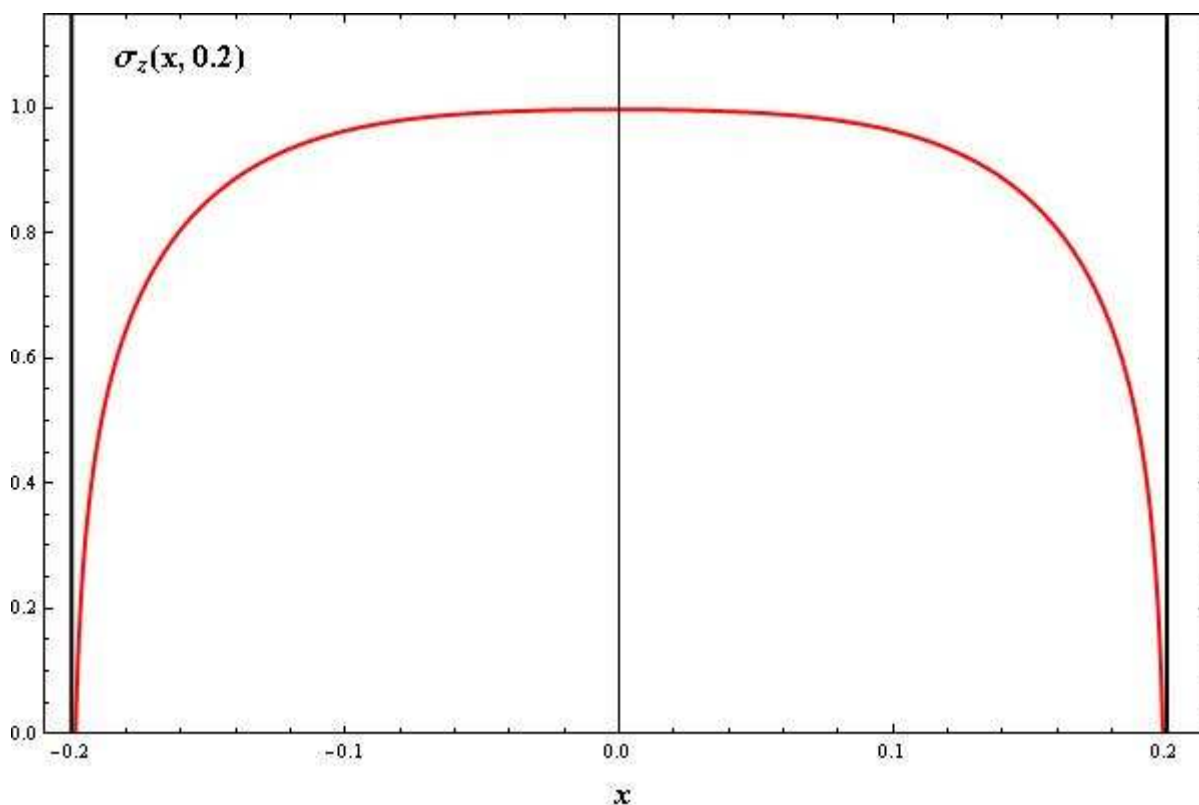


Рис. 6. Распределение напряжений с учетом внешнего трения

Однако используемая здесь гамма-функция стремится к бесконечности на оси x , т. е. в нашем случае – на стенках опоки. Но нужно иметь в виду, что, во-первых, здесь приведен приблизительный (ориентировочный) расчет. Во-вторых, расчет проведен не для сплошной среды, а для дискретной, в которой само понятие напряжений имеет смысл только применительно к достаточно большим по сравнению с размером частиц объемам среды. Интегрирование гамма-функции даже вблизи особенности дает конечные результаты, т. е. вблизи стенки желательно использовать не само значение напряжений, а некое усреднение по элементарному объему, размеры которого должны быть больше размеров частиц, составляющих среду.

Перенесение представленной модели на трехмерный случай с точки зрения математики не представляет особого труда. Правда, в этом случае потребуется «свертка» (для учета эффекта отражения) функции двух переменных. С другой стороны, можно высказать предположение, что для равномерного давления на поверхности «свертка» приведет к равномерному распределению напряжений внутри опоки.

Дальнейшее применение механики зернистых сред для моделирования формовочных процессов литейного производства потребует решения некоторых задач, прежде всего, по смягчению допущений самой механики:

1. Расчет деформаций требует учета реологических зависимостей и отказа от допущения о постоянстве плотности среды по всему объему, получение самих этих зависимостей предпочтительно вести с учетом структуры и состава среды, как, например, это было сделано в [4].
2. Учет возможности разрушения структуры зернистой среды под действием внешней нагрузки. Это необходимо, в первую очередь, для моделирования процессов виброоживления и перетекания песка при воздействии вибрации. В связи с этим особенный интерес представляет анализ изменения внутреннего и внешнего трения в песке под воздействием вибрации.
3. Расширение применения механики зернистых сред на дискретные среды, обладающие некоторой прочностью при растяжении. Это требуется для моделирования процессов уплотнения песчано-глинистых смесей, которые по своей природе являются сильно дисперсными средами.

Список литературы:

1. Механика грунтов, основания и фундаменты: Учеб. пособие для строит. спец. вузов / С.Б. Ухов, В.В. Семенов и др.; Под ред. С.Б. Ухова. – 3-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2004.
2. Кандауров И.И. Механика зернистых сред и ее применение в строительстве. – Л.: Стройиздат (Ленинградское отд-е), 1988.
3. Аэров М.Э., Годес О.М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. – Л.: Химия, 1968.
4. Покровский Г.И. Исследования по физике грунтов. – М.-Л.: Главная редакция строит. литературы, 1937.